

Classes préparatoires MP

Programme de mathématiques

Première année

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE : Objectifs de formation	2
PROGRAMME D'ALGEBRE : PREMIER SEMESTRE	3
Nombres complexes et trigonométrie (12 heures)	3
Calculs algébriques (6 heures)	4
Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs(12 heures)	5
vocabulaire ensembliste(12 heures)	6
Structures algébriques usuelles (6 heures)	7
Polynômes et fractions rationnelles (28 heures)	7
Calcul matriciel(6 heures)	9
PROGRAMME D'ALGEBRE : DEUXIEME SEMESTRE	10
Espaces vectoriels et applications linéaires	10
Espaces vectoriels(16 heures)	10
Espaces de dimension finie (9 heures)	11
Applications linéaires (16 heures)	12
Sous-espaces affines d'un espace vectoriel (3 heures)	13
Matrices	14
Opérations sur les matrices (4 heures)	14
Matrices et applications linéaires (4 heures)	14
Changements de bases, équivalence et similitude (6 heures)	15
Opérations élémentaires et systèmes linéaires (4 heures)	16
Groupe symétrique et déterminants	16
Groupe symétrique (2 heures)	16
Déterminants (8 heures)	17
Espaces préhilbertiens réels(12)	18
PROGRAMME D'ANALYSE : PREMIER SEMESTRE	20
Techniques fondamentales de calcul en analyse (20H)	20
Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes	20
Primitives et équations différentielles linéaires	22
Nombres réels et suites numériques (18H)	23
Limites, continuité,dérivabilité	24
Limites, continuité (12H)	24
Dérivation(14H)	26
Fonctions convexes(6H)	27
Analyse asymptotique(14H)	27
PROGRAMME D'ANALYSE : DEUXIEME SEMESTRE	29
Intégration(24H)	29
Séries numériques(18H)	30
Dénombrement(10H)	31
Probabilités(26H)	32
Probabilités sur un univers fini	32
Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini	33

INTRODUCTION GENERALE : Objectifs de formation

Le programme de mathématiques des classes préparatoires MP est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant ou de scientifique.

Les programmes des classes préparatoires définissent un corpus de connaissances et de capacités, et explicitent six grandes compétences qu'une activité mathématique bien conçue permet de développer :

- s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- modéliser : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- représenter : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- raisonner, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- calculer, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme recommande le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces euclidiens, les fonctions de variable réelle.

Le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier est l'étude de l'arithmétique des entiers relatifs et de polynômes à une indéterminée. Le second, nettement plus volumineux, est consacré aux notions de base de l'algèbre linéaire, pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique et numérique.

Il importe de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite. Les interactions entre les aspects discret et continu sont mises en valeur.

Le programme d'analyse combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec elle de leur comportement local ou asymptotique.

À ce titre, les méthodes de l'analyse asymptotique font l'objet d'un chapitre spécifique, qui est exploité ultérieurement dans l'étude des séries. Pour l'étude des solutions des équations, le programme allie les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact et les méthodes d'approximation.

La pratique de calculs simples permet aux étudiants de s'approprier de manière effective les notions du programme. Le choix a donc été fait d'introduire très tôt un module important visant à consolider les pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles). Les théories sous-jacentes sont étudiées ultérieurement, ce qui doit en faciliter l'assimilation.

Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre directement (c'est-à-dire sans recourir à un instrument de calcul), sur des exemples simples, un certain nombre de méthodes de calcul, mais aussi connaître leur cadre d'application et la forme des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

L'enseignement des probabilités se place dans le cadre des univers finis. Il a vocation à interagir avec le reste du programme. La notion de variable aléatoire permet d'aborder des situations réelles nécessitant une modélisation probabiliste.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

L'année est découpée en deux semestres. Le volume horaire proposé pour chaque chapitre est approximatif et concerne le temps alloué au cours intégré (cours, applications et exercices corrigés (T.D)).

PROGRAMME D'ALGÈBRE : PREMIER SEMESTRE

Le programme du premier semestre est conçu de façon à atteindre trois objectifs majeurs :

- assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des programmes du secondaire, dont il consolide et élargit les acquis ;
- consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul, qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientifiques ;
- présenter des notions nouvelles riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

Il est à noter que les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique doivent être introduites **de manière progressive** en vue d'être acquises et maîtrisées en fin de premier semestre, et cela dans les deux parties : analyse et algèbre. Ces points sont les suivants :

- L'emploi des quantificateurs (sans que cela soit en guise d'abréviations) , implication, contraposition, équivalence, négation d'une proposition.
- Modes de raisonnement : par récurrence (faible et forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.

Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

Le volume horaire proposé pour chaque chapitre est approximatif et concerne le temps alloué au cours intégré (cours, applications et exercices corrigés (T.D)).

Nombres complexes et trigonométrie (12 heures)

L'objectif de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes acquises au secondaire. Le programme combine les aspects suivants :

- l'étude algébrique du corps \mathbb{C} , équations algébriques (équations du second degré, racines n -ièmes d'un nombre complexe) ;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;
- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreuses figures et d'insister sur l'aspect géométrique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	La construction de \mathbb{C} n'est pas exigible. On identifie \mathbb{C} au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.
Module	
Module. Relation $ z ^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Interprétation géométrique de $ z - z' $, cercles et disques.
Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par les fonctions circulaires.	Notation \cup . Les étudiants doivent savoir retrouver les formules du type $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.
Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme. Formules de trigonométrie exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos a \cos b$, $\sin a \cos b$, $\sin a \sin b$. Fonction tangente, fonction cotangente. Formule exigible : $\tan(a \pm b)$.	Les étudiants doivent savoir factoriser des expressions du type $\cos(p) + \cos(q)$. Notations \tan et \cotan .
Formules d'Euler.	Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

Formule de Moivre.

Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.**Formes trigonométriques**Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.Factorisation de $1 \pm e^{it}$.Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.Relation de congruence modulo 2π sur \mathbb{R} .**Equations du second degré**Résolution des équations du second degré dans \mathbb{C} .

Somme et produit des racines.

Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

Racines n -ièmesDescription des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.Notation \cup_n .

Représentation géométrique.

Exponentielle complexeDéfinition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$.

Exponentielle d'une somme.

Pour tous z et z' dans \mathbb{C} , $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.Notations $\exp(z)$, e^z .**Interprétation géométrique des nombres complexes**Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{c-b}{c-a}$.Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$.

Interprétation géométrique de la conjugaison.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.

L'étude générale des similitudes indirectes est hors programme.

Calculs algébriques (6 heures)

Ce chapitre a pour but de présenter quelques notations et techniques fondamentales de calcul algébrique.

Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.

Expressions simplifiées de $\sum_{i=1}^n k$, $\sum_{i=1}^n k^2$, $\sum_{i=0}^n x^k$.Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Sommes triangulaires.

Notations $\sum_{i=1}^n a_i$, $\sum_{i \in I} a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i$, $\prod_{i \in I} a_i$.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Coefficients binomiaux et formule du binôme

Factorielle. Coefficients binomiaux.

Notations C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Formule et triangle de Pascal.

Formule du binôme dans \mathbb{C} .**Systèmes linéaires**Système linéaire de n équations à p inconnues à coefficients dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .Interprétation géométrique : intersection de droites dans \mathbb{R}^2 , de plans dans \mathbb{R}^3 .

Système homogène associé. Structure de l'ensemble des solutions.

Opérations élémentaires.

Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Algorithme du pivot.

En pratique, on se limitera au cas $n \leq 3$ et $p \leq 3$.**Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs(12 heures)**

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences.

Divisibilité et division euclidienneDivisibilité dans \mathbb{Z} , diviseurs, multiples.

Caractérisation des couples d'entiers associés.

Théorème de la division euclidienne.

PGCD et algorithme d'Euclide

PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.

Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans \mathbb{N}) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b . Notation $a \wedge b$.

Algorithme d'Euclide.

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b .

Extension au cas de deux entiers relatifs.

Relation de Bézout.

L'algorithme d'Euclide fournit une relation de Bézout.

L'étude des idéaux de \mathbb{Z} est hors programme.

PPCM.

Notation $a \vee b$.

Relation entre PPCM et PGCD.

Entiers premiers entre eux

Couple d'entiers premiers entre eux.

Théorème de Bézout.

Forme irréductible d'un rationnel.

Lemme de Gauss.

PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout.

Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Nombres premiers

Nombre premier. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers. Pour p premier, valuation p -adique.	Crible d'Eratosthène. Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p -adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p -adiques.
--	--

Congruences

Relation de congruence modulo un entier sur \mathbb{Z} . Opérations sur les congruences : somme, produit. Petit théorème de Fermat.	Notation $a \equiv b[n]$. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme.
---	---

vocabulaire ensembliste(12 heures)

Ce chapitre regroupe des notions d'algèbre générale relatives aux ensembles, applications et relations, dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiants à la fin du premier semestre.

Toute étude systématique de la théorie des ensembles est hors programme.

Ensembles

Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie). Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Ensemble des parties d'un ensemble.	Ensemble vide. Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, \overline{A} et \complement_E^A pour le complémentaire. Notation $\mathcal{P}(E)$.
---	---

Applications et relations

Application d'un ensemble non vide dans un ensemble non vide. Graphe d'une application.	Une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F . Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E .
Famille indexée par un ensemble non vide. Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. Restriction et prolongement. Image directe. Image réciproque. Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections. Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée. Relation binaire sur un ensemble. Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	Notation $\mathbb{1}_A$. Notation $f _A$. Notation $f(A)$. Notation $f^{-1}(B)$. La notion d'ensemble quotient est hors programme.

Relations de congruence modulo un réel sur \mathbb{R} , modulo un entier sur \mathbb{Z} .
Relation d'ordre. Ordre partiel, total.

Structures algébriques usuelles (6 heures)

Le programme, strictement limité au vocabulaire décrit ci-dessous, a pour objectif de permettre une présentation unifiée des exemples usuels. En particulier, l'étude de lois artificielles est exclue.
La notion de sous-groupe figure dans ce chapitre par commodité.

Lois de composition internes

Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
---	---

Structure de groupe

Groupe. Groupe des permutations d'un ensemble. Sous-groupe : définition, caractérisation.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}_+^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}^*, \mathbb{U}, \mathbb{U}_n$. Notation S_X .
---	--

Structures d'anneau et de corps

Anneau, corps. Calcul dans un anneau. Groupe des inversibles d'un anneau.	Tout anneau est unitaire, tout corps est commutatif. Exemples usuels : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
---	--

Polynômes et fractions rationnelles (28 heures)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de base de ces objets formels et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.
L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de \mathbb{Z} , ce qui autorise un exposé allégé. D'autre part, le programme se limite au cas où le corps de base \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Anneau des polynômes à une indéterminée

Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ n'est pas exigible. Notations $\sum_{i=0}^d a_i X^i$, $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$. Le degré du polynôme nul est $-\infty$. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n . Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.
---	--

Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples.
Théorème de la division euclidienne.

Caractérisation des couples de polynômes associés.

Fonctions polynomiales et racines

Fonction polynomiale associée à un polynôme.
Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
Multiplicité d'une racine.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines.

Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Si $P(\lambda) \neq 0$, λ est racine de P de multiplicité 0.
Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines n'est exigible.

Dérivation

Dérivée formelle d'un polynôme.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.

Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.
Formule de Taylor polynomiale.
Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.
Algorithme d'Euclide.

Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B .
L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD.
Tous les PGCD de A et B sont associés ; un seul est unitaire. On le note $A \wedge B$.

Relation de Bézout.

L'algorithme d'Euclide fournit une relation de Bézout.
L'étude des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.

PPCM.

Le PPCM unitaire est noté $A \vee B$.
Relation entre PPCM et PGCD.

Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss.
PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

La démonstration est hors programme.
Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.
Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Formule d'interpolation de Lagrange

Si x_1, \dots, x_n sont des éléments deux à deux distincts de \mathbb{K} et y_1, \dots, y_n des éléments de \mathbb{K} , il existe un et un seul $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout i : $P(x_i) = y_i$.

Expression de P .
Description des polynômes Q tels que pour tout i : $Q(x_i) = y_i$.

Fractions rationnelles

Corps $\mathbb{K}(X)$.

Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.

Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

La construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas exigible.

Décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R}

Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .

La démonstration est hors programme.

On évitera toute technicité excessive.

La division selon les puissances croissantes est hors programme.

Si λ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X-\lambda}$.

Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

Calcul matriciel(6 heures)

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les matrices et le calcul matriciel pour de petites tailles ($n \leq 3$ et $p \leq 3$), afin de familiariser les étudiants avec ces notions, et cela avant de les étudier dans le cas général au deuxième semestre.

Matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} , avec $n \leq 3$ et $p \leq 3$.

Somme, produit, transposée d'une matrice. matrice inversible.

Interpretation des systèmes linéaires à l'aide des matrices.

PROGRAMME D'ALGÈBRE : DEUXIÈME SEMESTRE

Le programme du deuxième semestre en algèbre a pour objectif d'introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire et aux espaces préhilbertiens.

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, le corps \mathbb{K} est égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les objectifs du chapitre « Espaces vectoriels et applications linéaires » sont les suivants :

- acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;
- reconnaître les problèmes linéaires et les modéliser à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;
- définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; il convient d'insister sur les méthodes de calcul de dimension, de faire apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentations : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires ;
- présenter un certain nombre de notions de géométrie affine, de manière à consolider et enrichir les acquis relatifs à la partie affine de la géométrie classique du plan et de l'espace.

Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

Espaces vectoriels(16 heures)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Espaces vectoriels	
Structure de \mathbb{K} espace vectoriel.	Espaces \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}[X]$. On pourra introduire la notion d'espace vectoriel sur des exemples simples : \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}_3[X]$.
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de \mathbb{K} .
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droites vectorielles de \mathbb{R}^2 , droites et plans vectoriels de \mathbb{R}^3 . Sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une partie X .	Notations $\text{Vect}(X)$, $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-espace contenant X contient $\text{Vect}(X)$.
Familles de vecteurs	
Familles et parties génératrices.	
Familles et parties libres, liées.	
Base, coordonnées.	Bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.
Somme d'un nombre fini de sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	
Somme d'un nombre fini de sous-espaces.	
Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.	La somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1 + \dots + F_p$ sous la forme $x_1 + \dots + x_p$ avec $x_i \in F_i$ est unique.

Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E .

Existence de bases en dimension finie.

Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice on peut extraire une base.

Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.

Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Dimension d'un espace de dimension finie.

Dimensions de \mathbb{K}^n , de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

En dimension n , une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.

Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

Notation $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.

Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire.

Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe d'un nombre fini de sous-espaces.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces; formule de Grassmann. Caractérisation des couples de sous-espaces supplémentaires.

Si F_1, \dots, F_p sont des sous-espaces de dimension finie,

alors : $\dim \sum_{i=1}^p F_i \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Sous-espaces de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Dimension commune des supplémentaires.

Généralités

<p>Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque. Isomorphismes. Image et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i), i \in I)$. Image d'une base par un isomorphisme. Application linéaire de rang fini, rang. Invariance par composition par un isomorphisme.</p>	<p>L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel. Bilinéarité de la composition.</p> <p>Notation $\text{rg}(u)$.</p>
--	---

Endomorphismes

<p>Identité, homothéties. Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.</p> <p>Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2 = p$ et $s^2 = \text{Id}$. Automorphismes. Groupe linéaire.</p>	<p>Notations Id_E, Id. Non commutativité si $\dim E \geq 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$.</p> <p>Notation $\text{GL}(E)$.</p>
---	---

Détermination d'une application linéaire

<p>Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in I$: $u(e_i) = f_i$. Classification, à isomorphisme près, des espaces de dimension finie par leur dimension. Une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie. Si E_1, \dots, E_p sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u _{E_i} = u_i$ pour tout i.</p>	<p>Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.</p>
--	---

Théorème du rang

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$.
Théorème du rang : $\dim E = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$.

Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire.
Hyperplan.

Si H est un hyperplan de E , alors pour toute droite D non contenue dans H : $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.
Si E est un espace de dimension finie n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Formes coordonnées relativement à une base.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

En dimension n , les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Droites vectorielles de \mathbb{R}^2 , droites et plans vectoriels de \mathbb{R}^3 .

L'étude de la dualité est hors programme.

Sous-espaces affines d'un espace vectoriel (3 heures)

Le but de cette partie est double :

- montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au collège et au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi.
- modéliser un problème affine par une équation $u(x) = a$ où u est une application linéaire, et unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.

Cette partie du cours doit être illustrée par de nombreuses figures.

Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs.

Translation.

Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.

Intersection de sous-espaces affines.

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = a$ d'inconnue x est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\text{Ker } u$.

Repère affine, coordonnées.

L'écriture $B = A + \vec{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Sous-espaces affines de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 et la recherche de polynômes interpolateurs.

La notion d'application affine est hors programme.

Matrices

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- généraliser les notions introduites dans le chapitre « calcul matriciel » ;
- présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;
- étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et la relation d'équivalence qui s'en déduit sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
- introduire brièvement la relation de similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- étudier les opérations élémentaires et les systèmes linéaires.

Opérations sur les matrices (4 heures)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Espaces de matrices	
Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} . Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit matriciel	
Bilinéarité, associativité. Produit d'une matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro et de matrices nilpotentes. Application au calcul de puissances. Notation $GL_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme. Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire. Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures).	
Transposition	
Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse.	Notations tA , A^T .

Matrices et applications linéaires (4 heures)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	Notation $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$. Isomorphisme $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$.
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.
Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul.

Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire.

Blocs

Matrice par blocs.
Théorème du produit par blocs.

Faire le lien avec les sous-espaces stables.
La démonstration n'est pas exigible.

Changements de bases, équivalence et similitude (6 heures)

Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une autre.

La matrice de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est la matrice de la famille \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .
Inversibilité et inverse de $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.

Matrices équivalentes et rang

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , il existe une base \mathcal{B} de E et une base \mathcal{B}' de F telles que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = J_r$.

Matrices équivalentes.

Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r .

Invariance du rang par transposition.

Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.

La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.

Interprétation géométrique.

Classification des matrices équivalentes par le rang.

Matrices semblables et trace

Matrices semblables.

Trace d'une matrice carrée.

Linéarité de la trace, relation $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, invariance par similitude.

Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$.

Interprétation géométrique.

Notations $\text{tr}(A)$.

Notations $\text{tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

Opérations élémentaires et systèmes linéaires (4 heures)

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Opérations élémentaires

Interprétation en termes de produit matriciel.

Les opérations élémentaires sont décrites dans le paragraphe « Systèmes linéaires » du chapitre « Calculs algébriques ».

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

Application au calcul du rang et à l'inversion de matrices.

Systèmes linéaires

Écriture matricielle d'un système linéaire.

Interprétation géométrique : intersection d'hyperplans affines.

Système homogène associé. Rang, dimension de l'espace des solutions.

Compatibilité d'un système linéaire. Structure affine de l'espace des solutions.

Le système carré $Ax = b$ d'inconnue x possède une et une seule solution si et seulement si A est inversible. Système de Cramer.

Algorithme du pivot de Gauss.

Groupe symétrique et déterminants

Groupe symétrique (2 heures)

Le groupe symétrique est introduit exclusivement en vue de l'étude des déterminants.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Généralités

Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Notation S_n .

Cycle, transposition.

Notation $(a_1 a_2 \dots a_p)$.

Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence et unicité.

La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.

Commutativité de la décomposition.

Signature d'une permutation

Tout élément de S_n est un produit de transpositions.

La démonstration n'est pas exigible.

Signature : il existe une et une seule application ε de S_n dans $\{-1, 1\}$ telle que $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ et $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ' .

Déterminants (8 heures)

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;
- établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;
- indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Formes n -linéaires alternées

Forme n -linéaire alternée.

La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.

Antisymétrie, effet d'une permutation.

Si f est une forme n -linéaire alternée et si (x_1, \dots, x_n) est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Si \mathcal{B} est une base, il existe une et une seule forme n -linéaire alternée f pour laquelle $f(\mathcal{B}) = 1$. Toute forme n -linéaire alternée est un multiple de $\det_{\mathcal{B}}$.

Notation $\det_{\mathcal{B}}$.

La démonstration de l'existence n'est pas exigible.

Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.

Dans \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).

Comparaison, si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases, de $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$. La famille (x_1, \dots, x_n) est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme.

Caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une composée.

Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée.

Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Déterminant d'un produit.

Caractérisation des matrices inversibles.

Déterminant d'une transposée.

Calcul des déterminants

Effet des opérations élémentaires.

Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice triangulaire.

Déterminant de Vandermonde.

Comatrice

Comatrice.

Notation $\text{Com}(A)$.

Relation $A^t \text{Com}(A) = {}^t \text{Com}(A) A = \det(A) I_n$.

Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

Espaces préhilbertiens réels(12)

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- généraliser cette notion et exploiter, principalement à travers l'étude des projections orthogonales, l'intuition acquise dans des situations géométriques en dimension 2 ou 3 pour traiter des problèmes posés dans un contexte plus abstrait ;
- approfondir l'étude de la géométrie euclidienne du plan, notamment à travers l'étude des isométries vectorielles.

Le cours doit être illustré par de nombreuses figures. Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Produit scalaire

Produit scalaire.

Notations $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$, $x \cdot y$.

Espace préhilbertien, espace euclidien.

Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n , produit scalaire

$$(f|g) = \int_a^b fg \text{ sur } \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}).$$

Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire, distance.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.

Exemples : sommes finies, intégrales.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Formule de polarisation :

$$2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.

Notation X^\perp .

L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.

Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée).

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème de Pythagore.

Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.

Bases orthonormales

Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète.

Coordonnées dans une base orthonormale, expressions du produit scalaire et de la norme.

Produit mixte dans un espace euclidien orienté.

Notation $[x_1, \dots, x_n]$.

Interprétation géométrique en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.

En dimension finie, dimension de l'orthogonal.

Projection orthogonale. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.

Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur V est l'unique élément de V qui minimise la distance de x à V .

Notation $d(x, V)$.

Hyperplans affines d'un espace euclidien

Vecteur normal à un hyperplan affine d'un espace euclidien. Si l'espace est orienté, orientation d'un hyperplan par un vecteur normal.

Équations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal.

Distance à un hyperplan affine défini par un point A et un vecteur normal unitaire \vec{n} : $\left| \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} \right|$.

Lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$.

Cas particuliers de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Cas particuliers de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) : définition par la linéarité et la conservation des normes, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormale.

Symétrie orthogonale, réflexion.

Groupe orthogonal.

Notation $O(E)$.

Matrices orthogonales

Matrice orthogonale : définition ${}^tAA = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.

Groupe orthogonal.

Lien entre les notions de base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale.

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie. Matrice orthogonale positive, négative ; isométrie positive, négative.

Groupe spécial orthogonal.

Notations $O_n(\mathbb{R}), O(n)$.

Notations $SO(E), SO_n(\mathbb{R}), SO(n)$.

Isométries vectorielles en dimension 2

Description des matrices orthogonales et orthogonales positives de taille 2.

Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.

Classification des isométries d'un plan euclidien orienté.

Lien entre les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ et les nombres complexes de module 1.

On introduira à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.

PROGRAMME D'ANALYSE : PREMIER SEMESTRE

Le programme du premier semestre est conçu de façon à viser trois objectifs majeurs :

- assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des programmes du lycée, dont il consolide et élargit les acquis ;
- consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul, qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientifiques ;
- présenter des notions nouvelles riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

Il est à noter que les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique doivent être introduites **de manière progressive** en vue d'être acquises et maîtrisées en fin de premier semestre, et cela dans les deux disciplines : analyse et algèbre. Ces points sont les suivants :

- L'emploi des quantificateurs (sans que cela soit en guise d'abréviations) , implication, contraposition, équivalence, négation d'une proposition.
- Modes de raisonnement : par récurrence (faible et forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.

Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

Le volume horaire proposé pour chaque chapitre est approximatif et concerne le temps alloué au cours intégré (cours, applications et exercices corrigés (T.D)).

Techniques fondamentales de calcul en analyse (20H)

Le point de vue adopté dans ce chapitre est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse, en particulier celles de majoration. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul différentiel ou intégral utilisées sont différées à un chapitre ultérieur. Cette appropriation en deux temps est destinée à faciliter les apprentissages.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;
- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;
- le calcul de dérivées et de primitives ;
- la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;
- l'application des deux points précédents aux équations différentielles.

Les étudiants doivent connaître les principales techniques de calcul et savoir les mettre en pratique sur des cas simples. Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Inégalités dans \mathbb{R}	
Relation d'ordre sur \mathbb{R} . Compatibilité avec les opérations.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.
Parties positive et négative d'un réel.	Notations x^+ et x^- .
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	$x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$.
Intervalles de \mathbb{R} .	Expressions à l'aide de x et de $ x $.
Parties majorées, minorées, bornées.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $ x - a \leq b$.
Majorant, minorant, maximum, minimum.	
Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Graphes des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(a - x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$. Résolution graphique d'équations et d'inéquations du type $f(x) = \lambda$ et $f(x) \geq \lambda$.

CONTENUS

Parité, imparité, périodicité.
Somme, produit, composée.
Monotonie (large et stricte).
Fonctions majorées, minorées, bornées.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Interprétation géométrique de ces propriétés.

Traduction géométrique de ces propriétés.
Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Dérivation

Équation de la tangente en un point.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.
Tableau de variation. Graphe d'une réciproque.
Dérivée d'une réciproque.

Dérivées d'ordre supérieur.

Ces résultats sont admis à ce stade.
Exemples de calculs de dérivées partielles.
À ce stade, toute théorie sur les fonctions de plusieurs variables est hors programme.
Résultats admis à ce stade.
Les étudiants doivent savoir introduire des fonctions pour établir des inégalités.
Interprétation géométrique de la dérivabilité et du calcul de la dérivée d'une bijection réciproque.

Etude d'une fonction

Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude, tableau de variations, asymptotes verticales et horizontales, tracé du graphe.

Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.

Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, fonctions puissances.

Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.
Fonctions sinus, cosinus, tangente.
Fonctions circulaires réciproques.
Fonctions hyperboliques.

Dérivée, variation et graphe.
Notation \ln .
Les fonctions puissances sont définies sur \mathbb{R}_+^* et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur \mathbb{R}_+^* .

Notations Arcsin, Arccos, Arctan.
Notations sh, ch, th.
Seule relation de trigonométrie hyperbolique exigible : $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.
Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

Dérivation d'une fonction à valeurs complexes

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.
Dérivée de $\exp(\phi)$ où ϕ est une fonction dérivable à valeurs complexes.

La dérivée est définie par ses parties réelle et imaginaire.
Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Calcul de primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

Primitives des fonctions puissances, trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme,

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$, et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dérivée de $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$, où f est continue.

Résultat admis à ce stade.

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.

Intégration par parties pour des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Changement de variable : si φ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I

On définit à cette occasion la classe \mathcal{C}^1 . Application au calcul de primitives.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre : $y' + a(x)y = b(x)$,

Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.

où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs réelles ou complexes.

Résolution d'une équation homogène.

Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Méthode de la variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

Équation homogène associée.

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Résolution de l'équation homogène.

Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Si a et b sont réels, description des solutions réelles.

Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$, avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B \cos(\omega x)$, $x \mapsto B \sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Principe de superposition.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Nombres réels et suites numériques (18H)

L'objectif de ce chapitre est de fonder rigoureusement le cours d'analyse relatif aux propriétés des nombres réels. Il convient d'insister sur l'aspect fondateur de la propriété de la borne supérieure.

Dans l'étude des suites, on distingue les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

Il convient de souligner l'intérêt des suites, tant du point de vue pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels).

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Ensembles de nombres usuels

Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.

Partie entière.

Approximations décimales d'un réel.

Tout intervalle ouvert non vide rencontre \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

La construction de \mathbb{R} est hors programme.

Notations $[x]$, $E(x)$

Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.

Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} .

Une partie X de \mathbb{R} est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.

Généralités sur les suites réelles

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite.

Unicité de la limite.

Suite convergente, divergente.

Toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.

Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.

Pour $l \in \overline{\mathbb{R}}$, notation $u_n \rightarrow l$.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Notation $\lim_{+\infty} u_n$.

Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

Suites monotones

Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite.

Théorème des suites adjacentes.

Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Suites extraites

Suite extraite.

Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Utilisation pour montrer la divergence d'une suite.

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l , alors (u_n) tend vers l .

Les étudiants doivent connaître le principe de la démonstration par dichotomie, mais la formalisation précise n'est pas exigible.

La notion de valeur d'adhérence est hors programme.

Traduction séquentielle de certaines propriétés

Partie dense de \mathbb{R} .

Une partie de \mathbb{R} est dense dans \mathbb{R} si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.

Caractérisation séquentielle de la densité.

Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de \mathbb{R} , il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup(X)$ (resp. $+\infty$).

Suites complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

La démonstration n'est pas exigible.

Suites particulières

Suite arithmétique, géométrique. Suite arithmético-géométrique. Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Les étudiants doivent savoir déterminer une expression du terme général de ces suites.

Exemples de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Seul résultat exigible : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et si f est continue en l , alors $f(l) = l$.

Limites, continuité, dérivabilité

Cette partie est divisée en deux chapitres, consacrés aux limites et à la continuité pour le premier, au calcul différentiel pour le second.

Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles ou complexes.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $] -\infty, A]$ si $a = -\infty$.

Limites, continuité (12H)

Le premier paragraphe consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà abordées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).

Limite d'une fonction en un point

Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a .

Unicité de la limite.

Si f est définie en a et possède une limite en a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Si f possède une limite finie en a , f est bornée au voisinage de a .

Limite à droite, limite à gauche.

Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$.

Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$), de majoration (limite $-\infty$).

Théorème de la limite monotone.

Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Notations $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Notations $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Continuité

Continuité, prolongement par continuité en un point.

Continuité à gauche, à droite.

Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Continuité sur un intervalle.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème des valeurs intermédiaires.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Cas d'une fonction strictement monotone.

Image d'un segment par une fonction continue

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

La démonstration n'est pas exigible.

Continuité et injectivité

Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.

La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est continue.

La démonstration n'est pas exigible.

Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide de parties réelle et imaginaire.

Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.

Développement limité à l'ordre 1.
Interprétation géométrique.

La dérivabilité entraîne la continuité.

Dérivabilité à gauche, à droite.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées :
combinaison linéaire, produit, quotient, composition,
réciproque.

Tangente au graphe d'une réciproque.

Extremum local et point critique

Extremum local.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

Condition nécessaire en un point intérieur.

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle.

Utilisation pour établir l'existence de zéros d'une fonction.

Égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K , alors f est K -lipschitzienne.

Interprétations géométrique.

La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion.

Application à l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.Caractérisation des fonctions dérivables constantes,
monotones, strictement monotones sur un intervalle.Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue
sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

Interprétation géométrique.

Si $l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

Fonctions de classe \mathcal{C}^k Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe \mathcal{C}^k .Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k : combinaison
linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composi-
tion, réciproque.Les démonstrations relatives à la composition et à la réci-
proque ne sont pas exigibles.Théorème de classe \mathcal{C}^k par prolongement : si f est de
classe \mathcal{C}^k sur $I \setminus \{a\}$ et si $f^{(i)}(x)$ possède une limite finie
lorsque x tend vers a pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, alors f admet
un prolongement de classe \mathcal{C}^k sur I .Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction
de classe \mathcal{C}^{n+1} .**Fonctions complexes**

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties
réelle et imaginaire.Inégalité des accroissements finis pour une fonction de
classe \mathcal{C}^1 .Le résultat, admis à ce stade, sera justifié dans le chapitre
« Intégration ».

Fonctions convexes(6H)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les fonctions convexes d'une variable réelle. Le cours gagne à être illustré par de nombreuses figures.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Fonctions convexes d'une variable réelle

Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de \mathbb{R} si pour tout (x, y) de I^2 et tout λ de $[0, 1]$:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Inégalité des pentes.
Fonction concave.

Pour f convexe, les étudiants doivent connaître l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

où x_1, \dots, x_n sont des points de I et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs de somme 1.

Position relative du graphe et de ses cordes.

Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I , des fonctions convexes deux fois dérivables sur I .
Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.

Exemples d'inégalités de convexité.

Analyse asymptotique(14H)

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. Les suites et les fonctions y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir rapidement mener à bien des calculs asymptotiques simples.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Relations de comparaison : cas des suites

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.

Liens entre les relations de comparaison.
Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.

Caractérisation de ces relations à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^\beta(n)$, n^α , $e^{\gamma n}$.

Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.

Relations de comparaison : cas des fonctions

Adaptation aux fonctions des définitions et résultats précédents.

Développements limités

Développement limité, unicité des coefficients, troncature.

Forme normalisée d'un développement limité :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)) \text{ avec } a_0 \neq 0.$$

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point d'une fonction de classe \mathcal{C}^n .

Développement limité à tout ordre en 0 de \exp , \sin , \cos , sh , ch , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan , et de \tan à l'ordre 3.

Utilisation des développements limités pour préciser l'allure d'une courbe au voisinage d'un point.

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.

Équivalence $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^p$; signe de f au voisinage de a .

Utilisation de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement.

Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.

La division selon les puissances croissantes est hors programme.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local.

Exemples de développements asymptotiques

La notion de développement asymptotique est présentée sur des exemples simples.

Formule de Stirling.

La notion d'échelle de comparaison est hors programme.

La démonstration n'est pas exigible.

PROGRAMME D'ANALYSE : DEUXIEME SEMESTRE

Le programme du deuxième semestre en analyse est organisé autour de deux objectifs :

- prolonger les chapitres d'analyse du premier semestre par l'étude de l'intégration sur un segment et des séries numériques, et achever ainsi la justification des résultats admis dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse » ;
- consolider les notions relatives aux probabilités sur un univers fini introduites au lycée et enrichir le corpus des connaissances sur les variables aléatoires définies sur un tel univers.

Intégration(24H)

L'objectif majeur de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs réelles ou complexes et d'en établir les propriétés élémentaires, notamment le lien entre intégration et primitivation. On achève ainsi la justification des propriétés présentées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Ce chapitre permet de consolider la pratique des techniques usuelles de calcul intégral. Il peut également offrir l'occasion de revenir sur l'étude des équations différentielles rencontrées au premier semestre.

La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues est exclue.

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Continuité uniforme

Continuité uniforme.
Théorème de Heine.

La démonstration n'est pas exigible.

Fonctions continues par morceaux

Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier.

Fonction continue par morceaux sur un segment, sur un intervalle.

Une fonction est continue par morceaux sur un intervalle I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique. Aucune difficulté théorique relative à la notion d'aire ne doit être soulevée.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)dt$.

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Inégalité : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Les étudiants doivent savoir majorer et minorer des intégrales.

Relation de Chasles.

Extension de la notation $\int_a^b f(t)dt$ au cas où $b \leq a$. Propriétés correspondantes.

L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

Sommes de Riemann

Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} , alors :

Interprétation géométrique.

Démonstration dans le cas où f est de classe \mathcal{C}^1 .

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)dt.$$

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ pour f continue. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives. Intégration par parties, changement de variable.

Calcul de primitives

Primitives usuelles.

Sont exigibles les seules primitives mentionnées dans le chapitre «Techniques fondamentales de calcul en analyse».

Calcul de primitives par intégration par parties, par changement de variable.

Utilisation de la décomposition en éléments simples pour calculer les primitives d'une fraction rationnelle.

On évitera tout excès de technicité.

Formules de Taylor

Pour une fonction f de classe \mathcal{C}^{n+1} , formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n .

Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} .

On soulignera la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et Taylor-Lagrange).

Séries numériques(18H)

L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet d'illustrer le chapitre « Analyse asymptotique » et, à travers la notion de développement décimal de mieux appréhender les nombres réels.

L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue ; tout excès de technicité est exclu.

Généralités

Sommes partielles. Convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente.

La série est notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n \geq 0} u_n$. En cas de convergence,

sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Divergence grossière.

Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.

Lien suite-série.

La suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

Séries à termes positifs

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n , la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Comparaison série-intégrale dans le cas monotone

Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Séries de Riemann.

Application à l'étude de sommes partielles et de restes.

Séries absolument convergentes

Convergence absolue.
La convergence absolue implique la convergence.

Le critère de Cauchy est hors programme. La convergence de la série absolument convergente $\sum u_n$ est établie à partir de celles de $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de \mathbb{R}_+ , si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Représentation décimale des réels

Existence et unicité du développement décimal propre d'un réel.

La démonstration n'est pas exigible.

Dénombrement(10H)

Ce chapitre est introduit essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique. Il permet de modéliser certaines situations combinatoires et offre un nouveau cadre à la représentation de certaines égalités.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- parmi les propriétés du premier paragraphe, les plus intuitives sont admises sans démonstration ;
- l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini.

Notations $|A|$, $\text{Card}(A)$.

Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis.

Cardinal de la réunion de deux ensembles finis.

La formule du crible est hors programme.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Listes et combinaisons

Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n .

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n .

Probabilités(26H)

Ce chapitre a pour objectif de consolider les connaissances relatives aux probabilités sur un univers fini et aux variables aléatoires définies sur un tel univers présentées dans les classes antérieures. Il s'appuie sur le chapitre consacré au dénombrement.

Ce chapitre a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Il se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.

Probabilités sur un univers fini

Les définitions sont motivées par la notion d'expérience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Expérience aléatoire et univers

L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers.

Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événement «A et B», événement «A ou B», événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

On se limite au cas où cet univers est fini.

Espaces probabilisés finis

Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toutes parties disjointes A et B , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Détermination d'une probabilité par les images des singletons.

Probabilité uniforme.

Propriétés des probabilités : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.

Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω .

Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par :

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On justifiera cette définition par une approche heuristique fréquentiste.

L'application P_B est une probabilité.

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales.

Formules de Bayes :

1. si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.

2. si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors :

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

Événements indépendants

Couple d'événements indépendants.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A \setminus B) = P(A)$.
Famille finie d'événements mutuellement indépendants.	L'indépendance deux à deux des événements A_1, \dots, A_n n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n \geq 3$.

Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

L'utilisation de variables aléatoires pour modéliser des situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants.

Variables aléatoires

Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E . Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle. Loi P_X de la variable aléatoire X .	Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E , notation $X \in A$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leq x)$. L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$.
Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.	

Lois usuelles

	La reconnaissance de situations modélisées par les lois classiques de ce paragraphe est une capacité attendue des étudiants.
Loi uniforme. Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.	Notation $\mathcal{B}(p)$. Interprétation : succès d'une expérience. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.	Notation $\mathcal{B}(n, p)$. Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remise dans un modèle d'urnes.

Couples de variables aléatoires

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.	La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y) , les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y . Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Extension aux n -uplets de variables aléatoires.	

Variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes.
Si X et Y sont indépendantes :

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes.
--	---

Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors quel que soit $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Si X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Si X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Espérance

Espérance d'une variable aléatoire réelle.

Interprétation en terme de moyenne pondérée.

Une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle.

$$\text{Relation : } E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega).$$

Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance. Espérance d'une variable aléatoire constante, de Bernoulli, binomiale.

Formule de transfert : Si X est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans \mathbb{R} , alors

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)f(x).$$

L'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X .

Inégalité de Markov.

Si X et Y sont indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

La réciproque est fautive en général.

Variance, écart type et covariance

Moments.

Le moment d'ordre k de X est $E(X^k)$.

Variance, écart type.

La variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion. Une variable aléatoire réduite est une variable aléatoire de variance 1.

$$\text{Relation } V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

$$\text{Relation } V(aX + b) = a^2V(X).$$

Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli, d'une variable aléatoire binomiale.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Covariance de deux variables aléatoires.

Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Cas de variables indépendantes.

Variance d'une somme, cas de variables deux à deux indépendantes.

Application à la variance d'une variable aléatoire binomiale.